Fonction caractéristique de la $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $\mathcal{C}(a,b)$

Leçons 236, 245, 250, 261

Référence : Garet - Kurtzmann p 248

Théorème 1 Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

(i) $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $\phi_Y(t) = e^{imt} \exp\left(\frac{-1}{2}(\sigma t)^2\right)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Théorème 2 Soit $X \sim \mathcal{C}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{C}(a,b)$

(i) $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $\phi_Y(t) = e^{iat} e^{-|t| b}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1 :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} \, dx.$$

Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,z) & \longmapsto & \dfrac{e^{zx} e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \end{array}$$

On a alors :

$$\forall z \in i\mathbb{R}, \quad \phi_X(\cancel{z}) = \int_{\mathbb{R}} f(x,z)\, dx$$

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x,z)\,dx = e^{z^2/2} \quad \text{car } x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-z)^2}{2}\right)$$

est la densité de la $\mathcal{N}(z,1)$.

On cherche alors à montrer que $\int_{\mathbb{R}}$ fonct holomorphe (en z) :

(i) $x \longmapsto f(x,z)$ est $\mathcal{C}^0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe.

(ii) Domination sur les compacts : soit $R > 0$.

$\forall z \in \overline{D(0,R)}$, $\quad \left|f(x,z)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |e^{xz}| \cdot |e^{-x^2/2}|$

$$\leq e^{-x^2/2} e^{|x||\mathrm{Re}(z)|}$$

$$\leq \underbrace{e^{-x^2/2} e^{R|x|}}_{\in L^1(\mathbb{R}) \text{ car } = o(e^{-|x|}) \text{ en } \pm\infty}.$$

D'où $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x,z)\,dx$ est holomorphe par le thm d'holomorphie dans l'intégrale. Par le principe de prolongement analytique,

$$F(z) = e^{z^2/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_X(t) = e^{-t^2/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Alors $Y = m + \sigma X$. D'où

$$\phi_Y(t) = e^{imt} \exp\left(\frac{-1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

$\blacksquare$

Démonstration 2

On rappelle que :

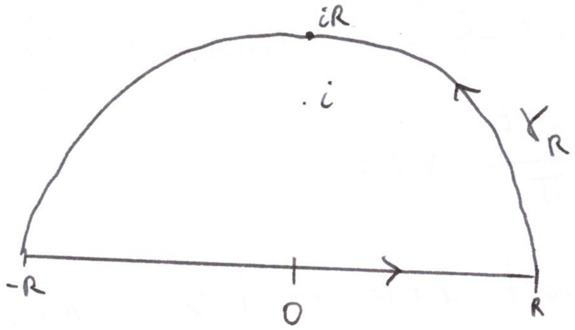
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx.$$

Étape 1 Posons $f : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ où $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$

$$(t, z) \longmapsto \frac{e^{itz}}{1+z^2}$$

$z \mapsto f(t,z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ses pôles sont $\pm i$ et simple.

On va intégrer $z \longmapsto f(t,z)$ sur γ_R :



où $R > 1$

Sur ce lacet, $f(t,\cdot)$ n'a qu'un pôle simple i et $\mathrm{Res}(f(t,\cdot), i)$ $= \lim_{z \to i} (z-i) f(t,z) = \frac{e^{-t}}{2i}$. D'où, par la formule des résidus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\gamma_R} f(t,z)\, dz = 2i\pi \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}$$

Étape 2 On sépare et on fait $R \longrightarrow +\infty$.

Soit $t \in [0, +\infty[$. Remarquons que :

$$\int_{\gamma_R} f(t,z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx + \int_0^\pi \underbrace{\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{1+(Re^{i\theta})^2} \times iRe^{i\theta}}_{:= g_R(\theta)} d\theta$$

mais aussi que :

≤ 0 car $t \geq 0$
$\theta \in [0,\pi]$

$$|g_R(\theta)| = R \frac{e^{\overbrace{-tR\sin\theta}}}{|1+z^2|} \leq \frac{R}{\underbrace{R^2-1}} \quad (\text{☁})$$

par la 2^{nd} inégalité triangulaire.

De (☁) on déduit :

(i) $g_R(\theta) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$

(ii) g_R est dominée par $\frac{R}{R^2-1} \in L^1([0,\pi])$

D'où, par le théorème de convergence dominée :

$$\int_{\gamma_R} f(t,z)\,dz \xrightarrow[R \to +\infty]{} \phi_X(t) \quad \forall t \geq 0$$

D'où $\forall t \geq 0,\ \phi_X(t) = \frac{e^{-t}}{\pi}$. Finalement, la loi de Cauchy étant symétrique, $\phi_X(t) = \frac{e^{-|t|}}{\pi}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) idem que dem. 1 : soit $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Alors $Y = a + bX$ et :

$$\phi_Y(t) = e^{iat} e^{-b|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\blacksquare$